Control Continu – Probabilité pour l'informatique - Corrigé

Exercice 1. *Analyse Combinatoire*

1. (2pt) D'un jeu de 52 cartes, on tire deux cartes simultanément (sans remise). De combien de manières différentes est-ce possible ? Et avec remise ?

☞ On applique le principe du dénombrement aux deux expériences ce qui donne $52 \times 51 = 2652$. Ensuite il s'agit de diviser ce résultat par deux car l'ordre dans lequel apparaissent les cartes ne nous intéresse pas, on obtient 1326. On peut également appliquer la formule des combinaisons, il s'agit en fait de trouver de combien de manières différentes on peut choisir une paire de cartes dans un jeu de 52 cartes :

$$C_{52}^{2} = \frac{52!}{50!2!} \tag{1}$$

Avec remise, en applicant le principe du dénombrement aux deux expériences on obtient $(52 \times 52)/2 = 1352$.

2. (2pt) Une boîte contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Combien de combinaisons différentes existe-t-il si on désire avoir une boule de chaque couleur ?

☞ Il y a 3 possibilités d'avoir une rouge, 4 possibilités d'avoir une bleue et 5 possibilités d'avoir une jaune ce qui se traduit par

$$\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}. \tag{2}$$

3. (4pt) Une classe de l'école de Paris a reçu 4 billets pour le cirque Bellucci. Sachant que cette classe est composée de 19 élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets dans chacun des cas suivants : (a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ; (b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ; (c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

☞

— Il est plus simple de s'imaginer que chaque billet peut "choisir" un élève, mathématiquement parlant c'est identique. Le premier billet peut choisir entre 19 élèves, le deuxième billet entre 18 et ainsi de suite, le résultat est

$$19 \times 18 \times 17 \times 16 = A_4^{19} = \binom{19}{4} 4! = \frac{19!}{(19-4)!} = 93024 \tag{3}$$

— Chaque billet peut choisir entre 19 élèves donc $19 \times 19 \times 19 \times 19 = 19^4 = 130321$.

— Ne pouvant pas distinguer les billets, il suffit de choisir un groupe de quatre élèves parmi les dix-neuf de la classe et leur donner à chacun n'importe lequel des billets "identiques".

$$\binom{19}{4} = \frac{19!}{(19-4)!4!} = 3876 \tag{4}$$

possibilités de choisir quatre élèves parmi dix-neuf, donc également 3876 possibilités de distribuer les billets.

4. (1pt) Utilisez le théorème du binôme pour calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$$

☞ Si on applique le théorème du binôme, on se rends facilement compte que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} = (1+x)^n \tag{5}$$

Exercice 2. *Axiomes et calculs des probabilités*

1. (5pt) Une urne contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. (a) Quel est le nombre total de combinaisons ? Calculer la probabilité des événements suivants : (b) A="les trois boules sont rouges" ; (c) B="on a tiré une boule de chaque couleur" ; (d) C="aucune des trois boules n'est rouge" ; (e) D="au moins une des trois boules est rouge" (Utiliser la réponse à la question d) ;

☞

— Il ne faut pas perdre de vue que chacune des boules a exactement la même chance d'être choisie indépendamment de sa couleur. Le nombre total de combinaisons 12 possibles de 3 boules parmi douze qui est $C_{12}^3 = 220$

— Intuitivement il y a une seule possibilité de choisir 3 boules rouges parmi 3, cela se traduit mathématiquement par $C_3^3 = 1$. Donc la probabilité étant définie par le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles on obtient $P(A) = 1/220 \sim 0,45\%$

— Le nombre de façons différentes de tirer une boule rouge est de 3, une bleue de 4 et une jaune de 5 donc la probabilité cherchée est $P(B) \sim \frac{3\times4\times5}{220} \sim 27,27$ %. Autrement dit :

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} \tag{6}$$

— Cela implique qu'on peut avoir (3 boules bleues et 0 boule jaune) ou (1 boule bleue et 2 boules jaunes) ou (2 boules bleues et 1 boule jaune) ou (0 boule bleue et 3 boules jaunes) :

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0} + \binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \sim 38,18\% \tag{7}$$

— On pourrait suivre le même raisonnement que pour $P(C)$ mais il est plus simple de se convaincre que l'événement "avoir au moins une boule rouge" est l'événement complémentaire de "n'avoir aucune boule rouge" donc d'après les axiomes de probabilités $P(D) = 1 - P(C) = 136 \sim 61,81\%$.

Exercice 3. *Probabilités conditionnelles*

1. (3pt) Dans une classe, 15% des notes de mathématiques sont insuffisantes, 25% des notes de physique sont insuffisantes et 10% des élèves ont des notes insuffisantes dans les deux branches. (a) Un élève a une note insuffisante en physique. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une note insuffisante en mathématiques. (b) Un élève a une note insuffisante en mathématiques. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une note insuffisante en physique.
☞

— C'est une probabilité conditionnelle, on sait que l'élève est insuffisant en physique, cette probabilité devient la référence, car c'est un fait acquis. La probabilité recherchée est "insuffisant en maths si insuffisant en physique"

$$P(M_a|P_h) = \frac{P(M_a \cap P_h)}{P(P_h)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5} \tag{8}$$

— On recherche

$$P(P_h|M_a) = \frac{P(M_a \cap P_h)}{P(M_a)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3} \tag{9}$$

2. (3pt) Une grossesse ectopique a deux fois plus de chance de se développer lorsque la femme enceinte fume que lorsqu'elle est non fumeuse. Le 32% des femmes enceinte fument, autrement dit, $P(F) = 0,32$. (a) Quelle est la probabilité $P(F^c)$ que la femme enceinte est une non-fumeuse?
Soit la probabilité que la "grossesse soit ectoplasmique sachant que le femme est une fumeuse", $P(E|F)$, 2p et la probabilité que la "grossesse soit ectoplasmique sachant que le femme est une non-fumeuse", $P(E|F^c)$, p. (b) Quel pourcentage de femmes, ayant une grossesse ectopique, sont fumeuses? *Indication : Utilisez le théorème de Bayes*
☞

— $P(F^c) = 1 - P(F)$

— On commence par poser la formule des probabilités conditionnelles

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} \tag{10}$$

On voit que $P(E)$ nous est inconnu, il faut alors conditionner $P(E)$:

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \tag{11}$$

On utilisant la dernière dans la premiere, on obtient la formule de Bayes :

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)} = \frac{0.32 \times 2p}{0.32 \times 2p + 0.68 \times p} \sim 0.48 \tag{12}$$