2 TD 2. Axiomes des probabilités

Rappels du cours

1. Lois de *De Morgan* ;
2. Ensemble fondamental, événement élémentaire, événement ;
3. Les trois axiomes des probabilités ;
4. Formule d'inclusion-exclusion pour $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$;
5. $P(\overline{A})$ et $P(A \cup B)$ en fonction de $P(A), P(B)$ et $P(A \cap B)$;
6. Inégalité de *Bonferroni*.

Exercice 2.1: Soit $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$ et soient $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$, et $C = \{5, 6, 7\}$. Calculer :

$$(a)\ \ \overline{A} \cap B, \quad (b)\ \ \overline{A} \cup B, \quad (c)\ \ \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}, \quad (d)\ \ \overline{A \cap (\overline{B \cup C})}, \quad (e)\ \ \overline{A \cap (B \cup C)}.$$

Exercice 2.2: Une cible consiste de 10 disques concentriques de rayons $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{10}$. L'événement A_i consiste a tirer dans le disque de rayon r_i. Quelle est la signification des événements suivants :

$$(a)\ \ B = \bigcup_{i=1}^{6} A_i, \quad (b)\ \ C = \bigcap_{i=1}^{10} A_i, \quad (c)\ \ D = A_5 \Delta A_6 = (A_6 \cap \overline{A_5}) \cup (A_5 \cap \overline{A_6}), \quad (d)\ \ E = \overline{A_1} \cap A_2?$$

Exercice 2.3: Soit A_i l'événement qui dénote que résultat à l'itération i d'une expérience $\mathcal{E}$ est égal à R. Soit $B_{n,m}$ l'événement qui représente que, dans n répétitions de l'expérience $\mathcal{E}$, le résultat R est obtenu m fois. Exprimer $B_{4,2}$ en fonction de A_i, $i = 1, \ldots, 4$. Rappel : les événements sont des ensembles.

Exercice 2.4: Deux dès indistinguables sont jetés et les résultats sont enregistrés. Sur une diagramme de Venn, représenter l'ensemble fondamental et identifier les événements suivants :

(a) au moins un des résultats est un 6 ;
(b) le résultat total (somme des deux dés) vaut au moins 9 ;
(c) les deux résultats sont égaux ;
(d) un résultat est deux fois plus grand que l'autre.

Exercice 2.5: Deux lettres différentes sont choisies au hasard, l'une après l'autre, dans le mot *tack*. Énumérer l'ensemble fondamental.

Exercice 2.6: Un ouvrier a produit n objets. Soit A_i, $i = 1, \ldots, n$ l'événement indiquant que l'objet i a un défaut. Exprimer les événements suivants en fonction de $A_1, \ldots, A_n$:

(a) aucun objet n'est défectueux ;
(b) au moins un objet est défectueux ;
(c) seulement un objet est défectueux ;
(d) au plus deux objets sont défectueux ;
(e) au moins deux objets ne sont pas défectueux ;
(f) exactement deux objets sont défectueux.

Exercice 2.7: Démontrer l'*inégalité de Bonferroni*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - n + 1.$$

Indication : Démontrer l'inégalité d'abord pour $n = 1, 2$ ensuite utiliser l'induction sur n.

Exercice 2.8: (*Lewis Carroll, A Tangled Tale, 1881*) Dans une lutte âpre, au moins 70% des soldats ont perdu un oeil, au moins 75% ont perdu une oreille, au moins 80% ont perdu une main, et au moins 85% ont perdu une jambe. Quel est le nombre minimum des soldats qu'on perdu à la fois un oeil, une oreille, une main, et une jambe ?

Exercice 2.9: Montrer que les données suivantes sont incompatibles (N représente le nombre total d'éléments) :

$N = 1000$	$N(A \cap B) = 42,$	
$N(A) = 525$	$N(A \cap C) = 147,$	*Indication* : Calculer $N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
$N(B) = 312$	$N(B \cap C) = 86$	
$N(C) = 470$	$N(A \cap B \cap C) = 25.$	

Exercice 2.10: La vie de pirate est souvent difficile et tout le monde n'en sort pas indemne. Lors du colloque annuel de pirates à la retraite on compte :

125 pirates, tous abîmés.
63 d'entre eux ont une jambe de bois.
45 d'entre eux ont un oeil de verre.
48 d'entre eux ont un crochet.
12 ont une jambe de bois et un oeil de verre.
14 ont une jambe de bois et un crochet.
9 ont un oeil de verre et un crochet.

Combien de pirates ont la totale (jambe de bois, crochet, oeil de verre) ?